Dr. Michael Wehrmann, Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig

Prävention von Dyskalkulie

Frühförderung im arithmetischen Erstunterricht

Das Thema „Prävention“ bei Lernschwierigkeiten ist in aller Munde. So gibt es diverse Programme (wie etwa „Komm mit ins Zahlenland“), die sich um den arithmetischen Früh- oder besser gesagt *Vor*-Unterricht bemühen. Der Tenor ist dabei: Wenn man Kindern die richtigen Voraussetzungen mitgibt, klappt es auch gut mit dem Erstklassunterricht und der weiteren mathematischen Entwicklung. Unterstellt ist dabei allerdings, dass die Schüler nach ihrer Einschulung einen ihrem Lernstand entsprechenden Mathematikunterricht genießen. Nach meiner Erfahrung ist dies gar nicht immer der Fall. Mein Blickwinkel bei Prävention ist daher ein anderer, ich will den Fokus nicht auf die Zeit vor der Einschulung, sondern auf den Erstunterricht selbst richten, weil dieser von zentraler Bedeutung für die arithmetische Entwicklung des Kindes ist. Nur wenn Lehrkräfte aufmerksam und geschult die ersten Lernschritte beobachten und ggf. intervenieren, kann einer Dyskalkulie vorgebeugt werden.

In der ersten Klasse werden die Grundlagen für das gesamte Rechnen bis hin zur Oberstufe gelegt. Lineare Gleichungen kann der Schüler z. B. später nur dann verständig lösen, wenn er das Prinzip der Umkehroperation verstanden hat. Gelingt es den Lehrkräften nicht, die Kinder im ersten Schuljahr – noch präziser: im ersten Schulhalbjahr – vom an der Zahlwortreihe orientierten rein zählenden zu einem verständigen, mit einer fundierten Kardinalzahlvorstellung operierenden Rechnen zu führen, ist das Entstehen einer Rechenschwäche vorprogrammiert. Prävention von Dyskalkulie ist für mich daher neben dem Schaffen von Voraussetzungen *für* auch wesentlich das mit dem entsprechenden Fachwissen und mit einem diagnostischen Blick ausgestattete Auftreten der Lehrkraft *im* Erstunterricht. Falsche Vorstellungen über Zahlen und Rechnen bei Kindern frühzeitig zu erkennen und so der Ausbildung von regelrechten Fehlvorstellungen über die Mathematik vorzubeugen, halte ich für *den* zentralen Punkt bei der arithmetischen Erstversorgung unserer Schüler.

Was heißt nun „diagnostischer Blick“? Nach meiner Beobachtung sind Eltern und auch etliche Lehrkräfte viel zu schnell zufrieden, wenn das richtige Ergebnis auf dem Papier steht. Doch diese quantitative Beurteilung der Leistungen, also das reine Überprüfen, wie viel Prozent der Aufgaben sind richtig gelöst, kann fatale Folgen haben, da sich – insbesondere im Elementarbereich – unverstanden oder schlicht auswendig gelernt richtige Ergebnisse erzielen lassen, ohne auf inhaltlichem Verständnis zu beruhen. Wichtig ist daher, sich die Genese der Ergebnisse – der richtigen wie der falschen – genau anzusehen und das Kind mit der Methode des „lauten Denkens“ seine Rechenwege und subjektiven Bewältigungsstrategien offen legen zu lassen. Die Leistung des Pädagogen besteht dann u. a. darin, Schlüsse zu ziehen, ob die betroffenen Inhalte vom Schüler wirklich auf verständige Art und Weise verinnerlicht sind oder er doch nur Schematismen auswendig gelernt hat und inhaltsleer reproduziert. Elemente einer solchen qualitativen Verlaufsdiagnostik gehören zu einem guten Anfangsunterricht vom ersten Tag an mit dazu. Gelingt es nicht im erforderlichen Umfang, den Lernstand der Kinder zu ermitteln und ggf. durch angemessene Förderung darauf zu reagieren, können Lehrer das Entstehen einer Rechenschwäche nicht rechtzeitig bemerken. Gehen sie im Stoff weiter, ohne sichergestellt zu haben, dass die nötigen Grundlagen sicher erarbeitet sind, verstärken sie sogar durch ihr unterrichtliches Vorgehen bestehende Rechenprobleme

1. Pränumerische Voraussetzungen des Zahlbegriffserwerbs

Kinder müssen vorschulische, im vorzahligen Bereich angelegte arithmetische Entwicklungsschritte durchlaufen haben, um Zahlen verstehen zu können. Diese pränumerischen Voraussetzungen des Zahlbegriffserwerbs werden im Erstklassunterricht oft zu wenig oder gar nicht thematisiert. Der Lehrplan der Grundschule sieht diese auch nicht als explizite Lerninhalte vor. Eine diagnostische Fokussierung auf den arithmetischen Entwicklungsstand bei Schuleintritt vermag aber bereits viele der späteren Probleme zu verhindern. In den gängigen Schulbüchern des ersten Schuljahres wird in aller Regel davon ausgegangen, dass die Schüler die nötigen Grundlagen für den Zahlbegriff bereits aufweisen. Zumeist werden bereits auf den ersten Seiten die Zahlen als Lernstoff behandelt, ohne dass das dafür notwendige Mengenverständnis thematisiert worden ist.

Überforderung Nr. 1: Pränumerische Defizite werden ignoriert

Werden bei Schulanfängern in den ersten Unterrichtsstunden bereits die Zahlen eingeführt, stellt dies für manche eine Überforderung dar – insbesondere für diejenigen Kinder, die noch nicht invariant sind. Diese Kinder haben keine Chance, in den arithmetischen Erstlernstoff einzusteigen – es wird bereits vom ersten Schultag an ihnen vorbei unterrichtet und sie haben keine Möglichkeit, einen fundierten Begriff von den natürlichen Zahlen auszubilden.

Nach meiner Ansicht ist es daher nötig, gleich zum Schuleintritt durch ein Screening jene Kinder zu ermitteln, denen es im spielerischen Umgang und in der Vorschule bislang nicht gelungen ist, die nötigen Voraussetzungen für den Zahlbegriffserwerb zu erlangen. Wenn nötig, sollte für die betroffenen Schüler dann bereits ab der ersten Schulwoche ein binnendifferenzierter Förderunterricht angeboten werden – so würde ein großer Teil der später auftretenden Rechenschwächen von vorne herein verhindert.

Klassifikation, Relationen, Seriation: Eigenschaften von Elementen und ihre Vergleichbarkeit

Erste mathematische Gedanken machen sich Kinder beim Bilden von Mengen: Wann gehört ein Element überhaupt zu einer Menge? Welche Eigenschaften ziehe ich heran, um zu sagen „Das ist eines von der Menge!“? Beim Klassifizieren muss ein Kind die Eigenschaften benennen und am Material (z. B. Schubi-Blöcken) identifizieren können. Die Kinder müssen lernen, Elemente mit einer und zwei gleichen Eigenschaften (Form, Größe und Farbe) und auch in Kombination mit einer Negation zu erkennen und ganz klar ausdrücken können: Das sind diejenigen Elemente, die gemeint sind. Diese gehören dazu und jene gehören nicht dazu.

Relationen formulieren zu können ist außerordentlich wichtig für den Zahlvergleich. Um eine Relation ausdrücken zu können, muss ein Kind eine quantifizierbare Eigenschaft eines Elements (z. B. die Länge) mit der eines anderen vergleichen und in Beziehung setzen („ist länger als“, „ist kürzer als“). Es ist also gefordert, eine Eigenschaft nicht als isolierte einem Element anhaftende zu sehen, sondern zwei Elemente bezüglich der Ausprägung dieser Eigenschaft zu vergleichen. Je nach Vergleich kann sich diese auch ändern: Eine Katze ist sowohl *größer als* eine Maus als auch *kleiner als* ein Elefant. Jede Relation kann zudem in umgekehrter Reihenfolge ausgedrückt werden, indem man bei der Aussage mit dem zweiten Element beginnt, die Aussage kehrt sich dadurch um. Ein weiterer wichtiger Punkt ist der Sonderfall „gleich“, der für sich erkannt und benannt werden muss – eine Straßenlaterne kann z. B. gleich hoch wie ein Haus sein, und ist dabei viel schmaler.

Seriation ist eine Anwendung der Relation. Hier geht es um die Fähigkeit, eine inkrementell zunehmenden Reihe herzustellen. Dies ist eine Vorbedingung des späteren Begreifens der Zahlreihe. Die Seriation kann mithilfe einer ungeordneten Menge unterschiedlich langer Buntstifte untersucht werden: „Ordne bitte diese Stifte der Länge nach!“ Dabei ist die Vorgehensweise oft aussagekräftig: Wie stellt das Kind die Reihenfolge her? Achtet es allein auf die Länge, oder auch auf die Farbe, Form oder Dicke? Fügt es einen neuen Stift unmittelbar nach dem Vergleich mit den kürzeren und längeren ein? Oder werden immer wieder isoliert zwei Stifte miteinander verglichen, die bislang hergestellte Ordnung darüber gar wieder zerstört? Neben dieser kontinuierlichen Seriation gibt es Aufgabenstellungen zur diskreten Seriation, bei denen zu einer gegebenen Menge an Elementen immer eine weitere Menge hinzugelegt werden soll, die genau ein Element mehr enthält. Auch Zeit- und Handlungsabläufe sind seriell, zuweilen bedingt z.B. eine Handlung eine andere, die serielle Ordnung muss erkannt und eingehalten werden.

Diagnostische Ermittlung des Stadiums der Invarianz im Sinne Piagets

Jean Piaget, ein heute leider oft zu Unrecht zurückgewiesener Entwicklungspsychologe, benutzte in seinem Werk „Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde“ den Begriff der *Varianz*, der ein vorzahliges Entwicklungsstadium beschreibt, in dem Kinder die Mächtigkeit einer Menge mit subjektiven Kriterien wie der Größe oder der Anordnung der Elemente verknüpfen. Kinder müssen nach Piaget zum Stadium der *Invarianz* (oder auch Mengenkonstanz) gelangen, um über den Begriff der „reinen Anzahl“ später einen kardinalen Zahlbegriff ausbilden zu können. Laut Piaget gelingt dies den Kindern in aller Regel im Alter von fünf bis sieben Jahren – und genau in der Mitte liegt in Deutschland das Schuleintrittsalter. Treffen Piagets Zahlenwerte zu, so hieße das, dass eine beträchtliche Zahl von Kindern zum Schuleintritt noch variant ist und dennoch einen Zahlbegriff ausbilden soll.

Eine klassische Versuchsanordnung zur Überprüfung, ob Kinder einen Begriff der Mengenkonstanz haben, ist der Vergleich zweier anfangs ungeordneter Mengen von gleich vielen Elementen (wie etwa sechs rote und sechs grüne Plättchen). Es geht für das Kind darum, *ohne zu zählen* herauszufinden, welche Menge mehr Plättchen enthält bzw. die Gleichmächtigkeit beider Mengen festzuhalten. Probates Mittel hierfür ist die Herstellung einer Eins-zu-eins-Zuordnung, indem die Plättchen in zwei einander genau gegenüber liegenden Reihen auf den Tisch gelegt werden. Es gilt, zunächst zu ermitteln, ob das Kind solch eine Zuordnung herstellen („jeder rote hat einen grünen“ o.ä.) und darüber die Gleichmächtigkeit erkennen und benennen kann. Liegen sich die Plättchen in dieser Anordnung gegenüber, wird vor den Augen des Kindes die eine Reihe zusammengeschoben und die andere ausgedehnt. Die Frage ist, ob der Schüler bei der ursprünglichen Beurteilung bleibt oder sich durch die veränderte Raumlage beeinflussen lässt. Etliche Kinder bewerten die Menge in der längeren Reihe (in seltenen Fällen sogar die der kürzeren) als subjektiv mehr: „Da sind jetzt mehr, weil die ist länger!“ Ein Kind, das sicher mengenkonstant ist, kann hingegen antworten „Es sind immer noch gleich viele! Du hast doch keinen weggenommen oder dazugetan!“ Es gibt eine Vielzahl von Variationen dieser Versuchsanordnung. Ich verwende gerne auch gleich viele kleine und große Steckwürfel, welche ich gegenüber lege, um zu sehen, ob das Kind von der Größe der Objekte absehen kann. Fragen wie „Was sind mehr Tiere, fünf Hasen oder fünf Elefanten?“ gehen in die gleiche Richtung.

Das Ziel dieser Fragen besteht darin, zu ermitteln, ob der Schüler zu der gedanklichen Abstraktionsleistung in der Lage ist, dass die Anzahl von Raumlage und Repräsentanz unabhängig ist. Wenn nach dem „wie viel“ gefragt wird, sind die Elemente einer Menge nur in einer Eigenschaft relevant, nämlich *eines* der Menge zu sein. Die individuelle Größe, die Raumlage oder andere Eigenschaften wie die Farbe sind dafür gänzlich irrelevant. Auf diese Vorstellung der „reinen Anzahl“ muss sich ein Kind gedanklich beziehen können, wenn nach dem Mehr oder dem Weniger zweier Mengen gefragt wird.

Erarbeitung pränumerischer Einsichten mit Unterrichtsmaterialien von Kutzer

Der Mathematikdidaktiker Reinhard Kutzer hat sich zusammen mit seinem Autorenteam mit der Lernwerkreihe „Mathematik entdecken und verstehen“ um die Darstellung der ersten mathematischen Lernschritte verdient gemacht. Oft als Lehrwerk für Förderschulen bezeichnet, leistet dieses Werk sehr gute Dienste für den (Förder-)Unterricht der ersten Klassen in der Regelschule, da nicht das Bewältigen, sondern das Begreifen der Lerninhalte im Vordergrund steht. Der integrierte diagnostisch-didaktische Ansatz von Kutzer stützt sich auf die zentralen Begriffe „Komplexität“, „Niveau“ und „Lernart“ des Lernprozesses (in Kutzers Terminologie die „Dimensionen“ des Lernens). Mit Komplexität meint er im Wesentlichen die mathematischen Inhalte, die aufeinander aufbauend von einfachen Strukturen der Invarianz über den Zahlbegriff hin zu den komplexeren Strukturen der Operationen und des Dezimalsystems führen. Niveau beschreibt die einzelnen Abstraktionsstufen des mathematischen Begreifens von konkreten Handlungen hin zu reinen Denkoperationen, die sich an Aeblis Entwicklungsstufen enaktiv (konkret-operational), ikonisch (bildlich) und symbolisch-abstrakt orientieren. Die jeweilig angemessene Lernart wird durch die anderen beiden Dimensionen bestimmt.

Kutzers didaktisches Konzept des „struktur- und niveauorientierten Lernens“ und der „Mehrdimensionalität des Lernprozesses“ beinhaltet die Annahme, dass eine „permanente Provozierung von Erkenntnissen anstelle des Erlernens von Verfahren“ nur unter einer genauen Positionsbestimmung des Schülers innerhalb dieser Dimensionen erfolgen kann. Ein Hauptanliegen von Kutzer besteht deshalb in der Forderung nach der Integration einer Verlaufsdiagnostik des erreichten Lernstandes in den Unterricht, bevor sich inhaltlich um darauf aufbauende Lerninhalte gekümmert werden kann.

2. Zahlbegriffsbildung – Kardinalzahlen als allgemeine Vorstellung von Anzahl

Verständiges Rechnen basiert auf einem entwickelten kardinalen Zahlbegriff. Dieser muss vollständig abgesichert sein, bevor die ersten Rechenoperationen eingeführt werden, da jede Rechnung mit Kardinalzahlen operiert. Wenn man sich die Lehrbücher für die erste Klasse etwas genauer ansieht, bemerkt man, dass in den meisten Fällen sehr schnell mit dem Rechnen begonnen wird. Zwar gibt es anfangs immer auch ein paar Aufgaben zur Anzahlbestimmung – doch lassen sich diese durch einfaches Zählen schnell erledigen. Ohne ein ausgefeiltes Konzept von Zahlen als Stellvertretern für Anzahlen verharren einige Schüler jedoch im Stadium des monotonen repetitiven Zählens. Zumeist ist dies darauf zurückzuführen, dass sie die Rechenoperationen nicht als Anzahlveränderung begreifen können, da sie sich die Zahlen nicht über eine Anzahlvorstellung angeeignet haben.

Überforderung Nr. 2: Schüler müssen ohne kardinalen Zahlbegriff rechnen

Der wichtigste Punkt präventiver Erstunterrichtung ist meines Erachtens die verlaufsdiagnostisch verifizierte Absicherung eines flexiblen kardinalen Zahlverstehens inklusive der Zahlbeziehungen und Zahlzerlegungen. Doch dies findet kaum statt. Kinder werden oft mit rechenoperationalen Anforderungen konfrontiert, denen sie mit ihrem Kenntnisstand noch nicht gerecht werden können. Mit einem *nominalistischen*, das heißt lediglich an der Zahlwortreihe orientierten Zahlbegriff können sie keinen anderen Weg wählen als das beharrliche Abschreiten dieser Reihenfolge in Form des Zählens. Vorwärts wie rückwärts – wobei ihnen rückwärts meist schwerer fällt, da sie mühsam eine Reihe in umgekehrter Reihenfolge rekonstruieren müssen, die sie nur vorwärts gut beherrschen. „Bloß kein minus… lieber plus!" ist ein Kinderzitat, das auf diese Problematik hinweist – und der Titel eines Buches an dem ich mitgewirkt habe, das sich zur Vertiefung empfiehlt. Ohne kardinale Einsichten verbleiben die Schüler auf diesem Entwicklungsniveau. Jedes Üben verfestigt nur ihre Zählfertigkeit (zunehmend verdeckt oder ganz im Kopf), statt ihnen beim Verstehen und Begreifen der elementaren Rechenoperationen auch nur im Ansatz zu helfen.

Zählen will gelernt sein: Synchrones Zählen und resultatives Zählen

Zählen ist nicht gleich Zählen. Die Kenntnis der Zahlnamen und deren Reihenfolge ist zwar eine nötige Voraussetzung, doch reicht dies für ein sachgerechtes Zählen längst nicht aus. Der Sinn des Zählens ist nicht das Aufsagen eines Gedichts (wie es manchen Kindern durchaus erscheint), sondern das Bestimmen der Anzahl einer Menge. Dafür ist es zum einen notwendig, *synchron* zu zählen, d.h. jedem Element wird beim Antippen mit dem Finger genau ein Zahlname zugeordnet. Zum anderen muss im Zählakt vergegenwärtigt werden, was damit bewerkstelligt werden soll. Wenn ich auf das erste Element tippe und „eins" sage, ist dies bereits eine Anzahlbestimmung – von diesem einem Ding eben. Wandert der Finger zum nächsten Element und der Schüler sagt „zwei", kommt damit gedanklich ein weiteres Ding hinzu. Das Kind deutet zwar (statisch betrachtet rein ordinal) auf das zweite Element – doch wird dies zur bereits gezählten Teilmenge hinzugedacht, das vorherige ist bereits gezählt und wird, wenn ich „zwei" sage, inkludiert. Dies ist mit dem Begriff *resultatives Zählen* gemeint: Jeder weitere Zählschritt schließt die bereits gezählten Elemente gedanklich mit ein – auch wenn der Finger nur ein Element berührt, sind alle vorherigen mitgemeint.

Kardinale Zahlvorstellung: Zahlaspekt oder Grundlage der Zahlbegriffsbildung?

In der Literatur sind für die natürlichen Zahlen ganz unterschiedliche Arten der Begriffsbestimmung üblich. Neben einer axiomatischen bzw. definitorischen Darlegungsweise in der fachmathematischen Literatur findet man in mathematikdidaktischen Werken häufig eine anschauungsorientierte und funktionale Auffächerung der natürlichen Zahlen in ihre Zahlaspekte. Als Lerntherapeut, der mit dem Grundlagenverständnis befasst ist, kann ich mich mit keiner dieser Herangehensweisen anfreunden, sondern denke im Sinne von Lenz:

> „[Die] Definition der Zahlen [ist] alles andere als eine triviale Angelegenheit […], wie man auf Grund langer Gewöhnung an den Umgang mit Zahlen zunächst denken könnte. Eine logisch einfachere Begründung der elementaren Zahlenlehre erhält man tatsächlich, wenn man gar nicht nach der *Bedeutung* der Zahlen fragt […]. Daß man die Zahlen zum Zählen benutzen kann, ist dann nicht die Grundlage, sondern eine wichtige Anwendung der zunächst rein formal entwickelten Theorie. […] [Eine] von der Erfahrung angeregte Kardinalzahlenvorstellung […] gibt die einleuchtendste Begründung der elementaren Rechenregeln, nicht aber die logisch einfachste Begründung der Arithmetik." (LENZ 1976, S. 31 f.; Herv. i. O.)

In der Mathematikdidaktik wird der zu erlangende Zahlbegriff zumeist über die verschiedenen Zahlaspekte durch eine Aufzählung von Eigenschaften bzw. Funktionen bestimmt. Mein förderdidaktischer Ausgangspunkt bei der Erklärung natürlicher Zahlen ist dagegen der kardinale Zahlaspekt, den ich als die zentrale Grundlage für arithmetische Einsichten halte. Diese Bewertung basiert auf zwei Überlegungen: Zum einen weisen Schüler mit Rechenschwierigkeiten in der Regel enorme Defizite gerade beim kardinalen Zahlverständnis auf. Sie kennen die Zahlwortreihe und vollziehen auf mechanische Weise Rechenoperationen, ohne sich Zahlen als Anzahlen erarbeitet zu haben. Die Erfahrung zeigt, dass ein Eintrainieren der einzelnen Zahlaspekte ohne kardinales Verständnis erfolglos bleibt. Zum anderen beruht die gesamte Arithmetik auf dem kardinalen Zahlbegriff, alle Rechenoperationen werden mit Kardinalzahlen durchgeführt, sind also Veränderungen von Anzahlen.

Was sind eigentlich Kardinalzahlen? Prinzip des inkrementellen Zahlaufbaus um plus eins

Zahlen sind eine Abstraktionsleistung: Es gibt sie nur als Vorstellung im Kopf, sie sind eine rein geistige Leistung. Natürliche Zahlen sind die *allgemeine Vorstellung von Anzahl*, da sie die Anzahl von Elementen einer Menge bedeuten. Ihnen liegt als Einheit das Einfache, die Eins, zu Grunde. Ihre Gemeinsamkeit besteht im Ausdrücken von Vielfachen der Eins, ihre Besonderheit ist die jeweils bedeutete Anzahl, wie in der folgenden Abbildung 1 dargestellt.

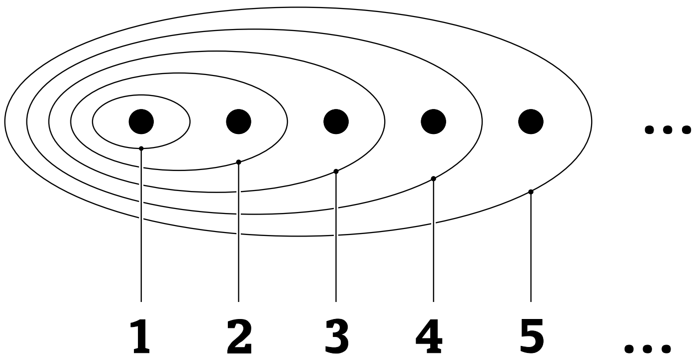

Abb. 1: Der inkrementelle Zahlaufbau um eins

Hierum muss es in den allerersten mathematischen Schritten der ersten Klasse gehen. Wenn das Kind nicht gelernt hat, bestimmte Mengen mit Zahlen in Verbindung zu bringen, kann es sich lediglich an der Reihenfolge der Zahlwortreihe orientieren. Es bleibt ihm verschlossen, dass sich die von ihm nacheinander aufgesagten Zahlen immer um die Mächtigkeit eins unterscheiden. Die Kinder müssen durch reflektierte Materialhandlung lernen, Zahlen abstrakt als Stellvertreter von Anzahlen zu denken. Der zentrale Grundgedanke dabei ist die Gemeinsamkeit der Zahlen über ihre Einheit: Alle Zahlen sind Einsen, darüber werden sie vergleichbar, zerlegbar und zusammensetzbar. Erste arithmetische Schritte müssen daher die Veranschaulichung dieses Zahlaufbaus behandeln, daran schließen sich Zahlvergleiche, Zahlzerlegungen und der umgekehrte Vorgang, die Zahlsynthese, an.

Vorgänger und Nachfolger: Zählpositionen versus Dekrement und Inkrement

Werden Kinder nach Vorgänger und Nachfolger einer Zahl gefragt, sind ihre Antworten häufig richtig. Doch können diese Zahlnachbarn auch ohne Einsicht in den Zahlaufbau benannt werden, ein schlichtes Abgehen der Zahlwortreihe genügt hierfür – im „Notfall“ fangen die

Schüler einfach ganz von vorne an, die Zahlwortreihe schnell leise aufzusagen und wenn die entsprechenden Zahlen „dran sind“, werden sie laut gesagt. Insofern spiegeln die Namen „Vorgänger“ und „Nachfolger“ das Zahlverständnis rechenschwacher Kinder wörtlich wider: Es sind einfach die Zahlnamen, die vorhergehen und nachfolgen – ohne weitere Bedeutung.

Ein tragfähiges Zahlverständnis erfordert jedoch, dass die Zahlnachbarn als *Dekrement* (eins weniger) und *Inkrement* (eins mehr) verstanden sind. Dies sind Einsichten, die aus dem kardinalen Zahlaufbau folgen und die ersten wichtigen Zahlbeziehungen darstellen. Zum Beispiel gilt $10 = 9 + 1$, worauf man später beim Rechnen mit der Zahl neun zurückgreifen sollte – neun ist eins weniger als zehn. Das Ermitteln des Werts der Summe $5 + 4$ kann ein Schüler durch das Zahlwissen $4 = 3 + 1$ unmittelbar aus dem Wert von $5 + 3$ angeben, Kenntnis über die kardinale Nähe $8 = 7 + 1$ ist notwendig für die additiv ergänzende Lösung von $8 - 7$ usw. Ohne Verständnis der Zahl als Stellvertreter von Anzahl und als Inklusion aller kleineren Anzahlen, gelingt dem Schüler das Erlernen des Verhältnisses von Teilen und Ganzem und den daraus ableitbaren Analogien in der Regel nicht – statt dessen muss er Veränderungen in der Strukturierung einer Menge immer wieder neu zählend ermitteln.

Verständige Zahlzerlegung als Grundlage für ein zählfreies Rechnen

Elementarer Bestandteil der Zahlbegriffsbildung ist die verständige Verinnerlichung der Zahlzerlegungen von null bis zehn als Fundament des zählfreien Rechnens. Für die Förderung bedeutet dies, dass mit Kindern, die auf das Zählen angewiesen sind, zunächst kardinale Zahlvorstellungen erarbeitet werden müssen. Das kann durchaus mithilfe der Fingern geschehen, wenn sie für reflektierte Handlungen verwendet werden. Manche Zahlzerlegungen sind durch die Hände natürlich vorgegeben: Acht besteht aus fünf und drei – einer ganzen Hand und drei Fingern. Die Zahl acht muss sich ein Schüler als $8 = 5 + 3 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1)$ denken können, um sich später die vier Grundrechnungen $5 + 3$, $3 + 5$, $8 - 3$ und $8 - 5$ aus diesem Zahlverhältnis abgeleitet erschließen zu können. Jede Zahl hat eine Zerlegung mehr als sie selbst bedeutet, denn durch den Tausch der Teile kommt man zu einer weiteren Zerlegung. Null ist auch eine Zahl, daher ist es nicht sinnlos zu formulieren „sechs besteht aus sechs und null“. Sechs Bonbons können so verteilt werden, dass einer alle erhält und der andere keine – das ist zwar ungerecht, aber mathematisch durchaus eine denkbare Anzahlzerlegung. Selbst die Zahl null kennt eine Zerlegung – wenn die Tüte leer ist, erhalten die beiden Kinder jeweils kein Bonbon.

„Da muss ich nichts tun!“ – Probleme mit der Null: Diagnose oder Symptom?

In schulischen Beurteilungen lese ich oft von „Problemen mit der Null“. Was soll eine solche Beschreibung aussagen? Dass der Schüler einen ausgebildeten Zahlbegriff hat, lediglich noch nicht von null? Damit habe ich, offen gesprochen, meine Probleme. Zu einem ausgebildeten Zahlbegriff gehört die Vorstellung von null als Anzahl der leeren Menge dazu. Die Zahl null ist nicht schwieriger zu verstehen als die anderen „normalen“ Zahlen. Sind Kinder jedoch darauf angewiesen, jede Anzahl zählend zu ermitteln, haben sie mit einer leeren Menge tatsächlich ein Problem – was soll da gezählt werden? Man spricht von einem *konkretistischen* Zahlbegriff, dem Angewiesensein auf konkret vorhandenes Veranschaulichungsmaterial. Rechenschwache Kinder neigen dazu, wenn sie nichts zählen können, null eine Sonderrolle, ja sogar eine Außenseiterrolle zuzuschreiben: „Da geht nichts!“. Dies führt dazu, dass sie null als absolute Verneinung begreifen und immer wenn null im Spiel ist, der Auffassung sind, man müsse (oder könne) gar nicht rechnen. Eine Zahl ist sie für diese Kinder jedenfalls nicht.

Fehleranalytisch betrachtet verweisen solche Probleme auf einen nicht ausgebildeten kardinalen Zahlbegriff. Genau dann, wenn Zahlen nicht als Anzahl verstanden sind, gibt es Schwierigkeiten mit einer leeren Menge. Zahlen sind aber nicht Zählergebnisse, sondern drücken unter Bezugnahme auf die Einheit eins Vielfache von ihr aus. So wie ich auf die Frage „Wie viele Würfel liegen in meiner Hand?“ bei einer mit vier Würfeln gefüllten Hand antworten kann „vier Würfel“ (und nicht „vier“, denn das Mitdenken und -benennen der Einheit ist elementar), kann ich auch bei einer leeren Hand eine Antwort geben: „kein Würfel“ oder mit einer Zahl formuliert: „null Würfel“. Auf der abstrakten Zahlebene gedacht bedeutet null „keine Eins“. Die Null ist sehr wohl eine Anzahlbestimmung unter Bezugnahme auf die Einheit, also eine Zahl. Damit stimmt obige Aussage „alle Zahlen sind Einsen“ auch für null.

3. Die Basisoperationen Addition und Subtraktion

Fundiertes Kopfrechnen, wie es in vielen Anwendungsbereichen der Mathematik verlangt ist, unterstellt die Erarbeitung der beiden basalen Grundoperationen im ersten Schulhalbjahr als quantitative Veränderungen von Zahlen. Nur so haben Schüler die nötigen Voraussetzungen, um den darauf aufbauenden arithmetischen Anforderungen zu genügen. Die Addition muss als das Zusammenführen zweier Kardinalzahlen verstanden sein, die Subtraktion als deren Umkehrung und damit als Exklusion einer Teilanzahl von einer Anzahl. Dieser inverse Zusammenhang der beiden Rechenarten macht es erforderlich, sie zeitgleich einzuführen – denn so mancher rechenschwache Schüler sieht keinerlei Zusammenhang zwischen ihnen. Aufbauend auf den verständig verinnerlichten Zahlzerlegungen sollten diese Zahlbeziehungen verwendet werden und die quantitativen Bezüge, die implizit in den Zerlegungen ausgedrückt sind („acht besteht aus fünf und drei“), in explizite Anzahlveränderungen überführt werden („fünf plus drei ist gleich viel wie acht“). Auch die Subtraktion wird durch eine explizite Anzahlveränderung aus den Zahlzerlegungen abgeleitet: Wenn ich von der Gesamtmenge einen Teil wegnehme, bleibt der andere übrig („acht minus drei ist gleich viel wie fünf“).

Überforderung Nr. 3: Es wird zu früh mit den Kindern geübt

Der Versuch, rechenschwachen Schülern die Grundrechenarten durch schulische Wiederholung, Nachhilfe oder häusliches Einüben zu vermitteln, muss scheitern, da gänzlich Unverstandenes trainiert wird. Ohne Begreifen der Bedeutung von Addition und Subtraktion macht das Üben keinen Sinn. Das Einzige, was sich bei einem begriffslosen Üben verfestigt, ist die Anwendung der mechanisiert abgespulten Zählverfahren. Solches Üben ist nicht nur sinnlos und eine Qual für Kind und Eltern, es trägt zudem häufig zu einer sekundären Neurotisierung bei. Muss ein Kind Unverstandenes eintrainieren, reagiert es auf die eigenen, vergeblichen Bemühungen häufig mit Lernabneigung und Matheangst, die sich auch zu einer fächerübergreifenden Lernunlust und zu einer allgemeinen Schulangst ausweiten können.

Systematisches Üben hat bei der Automatisierung bereits verstandener Inhalte durchaus seine Bedeutung. Zum eigentlichen Lernen im engeren Sinn darf man es jedoch nicht zählen, da damit kein Verstehensprozess angeregt bzw. kein inhaltliches Nachvollziehen von Sachverhalten ermöglicht wird. Ein sinnvolles und notwendiges Automatisieren knüpft immer an die verständig verinnerlichten Operationen an – es muss deshalb unterschieden werden von einem, das eine Begriffsbildung ersetzt und dadurch einem echten Lernen entgegensteht.

Auf die Geschwindigkeit kommt es beim Rechnen gar nicht an

Sich vom zählenden Rechnen zu lösen und die Grundrechenoperationen als Umgang mit Quantitäten, als Veränderungen von Anzahlen, zu begreifen, ist ein geistiger Schritt, der manchen Kindern nicht unbedingt leicht fällt – insbesondere wenn ihre nominalistischen Bewältigungsstrategien durch beständiges Üben verfestigt sind. Gut trainierte Zählkinder fallen durch ihre niedrige Antwortzeit oft gar nicht auf – sie zählen so schnell und geschickt, dass der Zählakt äußerlich kaum mehr sichtbar ist. In der ersten Phase verständiger Bearbeitung der Grundoperationen kann bei diesen Kindern die Bearbeitungszeit sogar ansteigen, was manche anfängliche Abneigung gegen verständiges Rechnen erklären mag. Die diagnostische Analyse offenbart, warum: Sich auf Zahlbeziehungen wie etwa die Zahlzerlegungen zu stützen, Zusammenhänge zu sehen und zu nutzen, ist eine gänzlich neue Anforderung für diese Schüler. Die abstrakte, weil rein geistige Leistung im Umgang mit den Zahlen benötigt ihre Zeit – bei unterschiedlichen Kindern unterschiedlich viel. An dieser Stelle bereits die Bearbeitungszeit einer Rechenaufgabe kritisch zu beäugen, kann diesen wichtigen Prozess des Begreifens konterkarieren. Wenn ein Kind „zu langsam" rechnet, mit der vorgegebenen Zeit in Lernzielkontrollen nicht zurechtkommt, kann das verschiedene Ursachen haben. Eine Möglichkeit ist sicherlich, dass es sich um ein unroutiniert zählendes Kind handelt – hier bedarf es unserer Intervention. Eine andere Möglichkeit besteht darin, dass es sich um ein Kind handelt, das noch unsicher ist, mit den eben erst neu erlangten Einsichten kompetent und zügig umzugehen. Dieses Kind muss im Begreifen bestärkt werden.

Die qualitative Verlaufsdiagnostik hat daher eine immens wichtige Bedeutung bei der Erstvermittlung. Nur wenn es der Lehrkraft gelingt, die subjektiven Bewältigungsstrategien über die Methode des „lauten Denkens" zu ermitteln, können dem Schüler die richtigen nächsten Lernangebote gemacht werden. Es sollte dabei nicht gefragt werden: „Kommt möglichst schnell ein richtiges Ergebnis zustande?", sondern vielmehr: „Auf welchem kognitiven Fundament geht das Kind mit den Zahlen um?" und „Wird auf zählende Strategien zurückgegriffen?" Womöglich sind die Zahlzerlegungen erarbeitet, werden beim Rechnen aber gar nicht genutzt. Dann wäre es die Aufgabe des Pädagogen, diese Verbindung herzustellen und dem Kind zu zeigen, wie man sich des Zahlwissens bedienen kann, um Fragen nach Vermehrung und Verminderung zählfrei zu beantworten.

Verbreiteter Fehlschluss: Wenn die Ergebnisse stimmen, ist auch alles verstanden

Rechenschwache Kinder sind Meister darin, mit unverstanden eintrainierten Verfahren, gar mit der mathematischen Logik widersprechenden „Rechentricks" richtige Ergebnisse zu erzielen. Ein Beispiel ist die rein zählende Bewältigung von Rechnungen mit dem (für rechenschwache Kinder typischen) Verzählfehler um eins, der mit einer Strategie dann korrigiert wird. $7 + 3$ ergibt bei zählenden Kindern häufig zunächst neun, weil bei den drei Zählschritten mit der Ausgangszahl begonnen wird: „sieben, acht, neun". Mit der Tatsache konfrontiert, dass das Ergebnis stets „eins daneben" liegt, greifen pfiffige Schüler mitunter zu einer Korrektur. „Ich muss erst einen weiter gehen, erst dann darf ich loszählen!", ist ein Beispiel für das Ersetzen einer fehlerhaften Strategie durch eine andere, gleichfalls fehlerhafte Lösungsprozedur – mit dem Unterschied, dass Variante zwei das richtige Ergebnis liefert. Mit korrektem Rechnen, also dem verständigen Umgang mit Zahlen, hat dies nichts zu tun.

Nehmen wir als weiteres Beispiel den begriffslosen Umgang mit „Kästchenaufgaben“, also Gleichungen mit Platzhaltern. Zur Ermittlung des fehlenden Operanden liefert die Strategie „Ich nehme die andere Rechenart!“ in 75% der Fälle die richtige Lösung. Ein Kind muss nichts über den Zusammenhang der Rechenarten wissen, um so bei $\boxed{} - 3 = 7$ das „minus“ durch ein „plus“ zu ersetzen und mit $3 + 7$ zur richtigen Lösung 10 zu gelangen. Die Trefferquote ist so hoch, weil in drei von vier Fällen die Umkehrung nötig ist – nur bei gesuchtem Subtrahenden (z. B. bei $6 - \boxed{} = 2$) wäre der Tausch gefragt. Doch „die andere Rechenart“ ist eine nicht auf einer Analyse der Gleichung beruhende Strategie, sondern ein wenig tragfähiges Konzept, das allein auf einer auswendig gelernten „Rechenregel“ beruht. Selbst wenn sie von manchen Schülern aufgebläht wird zu „Ich muss immer die Rechenart wechseln, außer bei minus mit Lücke in der Mitte“, was eine hundertprozentige Trefferquote garantiert, wird das nicht besser. Solch ein Kind hat sich eingeprägt, dass man „minus“ rechnen muss, *obwohl* dort ein „Minus“ steht. Diese Fehlvorstellung ist ein Baustein für die kindliche Vorstellung, Mathematik sei ein Wust aus logisch nicht erklärbaren Merkregeln.

Um der Verfestigung solcher Strategien (und damit langfristig der Ausbildung einer Rechenschwäche) vorzubeugen, müssen in der arithmetischen Erstvermittlung solche Idiosynkrasien im ersten Schulhalbjahr aufgespürt werden, damit man ihnen so früh wie möglich entgegenarbeiten kann. Wenn dem Kind von Anfang an geholfen wird, fehlerhafte Strategien nicht weiter zu verfestigen bzw. sie gar nicht erst auszubilden, sind wir einem guten Erstunterricht einen entscheidenden Schritt näher gekommen. Notwendig ist hierfür ein fest definierter schulischer Rahmen (ausbildungstechnisch, organisatorisch und zeitlich), der es ermöglicht, mit den Kindern ins Gespräch zu kommen und an jeder Stelle die richtige Frage zu stellen. „Erklär mir doch bitte mal, wie du das gemacht hast!“, sollte z. B. eine feste Frage im Unterrichtsgeschehen sein, um die kindlichen Denkwege offen zu legen – bei den falschen Antworten der Kinder genauso wie bei den richtigen.

Ist das rein zählende Operieren eine Vorstufe des Rechnens?

Das (sinnvolle) Zählen ist, wie dargelegt, ein wichtiger Bestandteil der mathematischen Entwicklung. Doch gehört das Zählen zum eigentlichen Rechnen? Haben Kinder schon einen Schritt der operationalen Begriffsbildung durchlaufen, wenn sie gut zählen können? Meine klare Antwort darauf lautet: Nein. Zählen ist das Mittel zur Anzahlbestimmung unstrukturiert dargebotener Mengen. Für das Rechnen ist Zählen unnötig und sogar kontraproduktiv. Anders ausgedrückt: Wer zählt, rechnet nicht. Zählen ist vielmehr ein *Ersatz* für das Rechnen.

> „Gemeinsam ist den qualitativen Erklärungsmustern, dass sich die betroffenen Schüler ohne kardinale und operationale Einsichten einen subjektiven Ersatzbegriff mathematischer Inhalte gebildet haben, der mit ihrem Handeln zusammenfällt. Man kann dies als eine methodische Distanzlosigkeit bezeichnen, der Mittelcharakter der mathematischen Berechnungs- und Bearbeitungstechniken ist ihnen nicht bewusst; sie halten die Methoden und Mittel selbst für die Mathematik.“
> (WEHRMANN 2003, S. 187)

Kinder mit Rechenschwierigkeiten identifizieren Addition und Subtraktion unmittelbar mit dem Zählen, es ist für sie ein und dasselbe. Für die präventive Arbeit in der ersten Klasse folgt daraus eine klare inhaltliche Trennung der *Zähl*fertigkeit von der *Rechen*fertigkeit. Auch „Zählweltmeister“ müssen die Bedeutung der Rechenoperationen von Anfang an komplett verstehen. Gerster hält es für unterlassene Hilfeleistung, wenn Zählmethoden als einzige Lösungsstrategie über das erste Schuljahr hinaus toleriert werden (vgl. GERSTER 1996, S. 143).

Ich formuliere es schärfer und halte es für die weitere Entwicklung dringend erforderlich, dass Kinder nach dem ersten Schul*halb*jahr überhaupt nicht mehr zählen (müssen).

Beim Subtrahieren kommt nichts weg – Zerlegung der Gesamtheit in ihre Teile

In Schul- und Übungsbüchern finden sich zur Einführung der Subtraktion oft Abbildungen, in denen Äpfel gegessen werden, Vögel wegfliegen und dergleichen. Zu Grunde liegt hier die Vorstellung, dass die Subtraktion eine Operation ist, bei welcher der Subtrahend gänzlich entfernt wird. Dies halte ich für eine ungünstige Betrachtungsweise, insbesondere, da dies eine häufige Fehlvorstellung von Kindern zur Subtraktion ist. Es sollten bei der Einführung der Subtraktion mit Bedacht Veranschaulichungen gewählt werden, welche sich eignen, die wichtigen Grundgedanken dieser Anzahlveränderung auszudrücken. Denn auch nach dem Vollzug der Verminderung – die besser als die Exklusion einer Teilmenge zu erläutern ist – sollte man sich darüber im klaren sein, dass der Subtrahend nach wie vor existiert – nur nun nicht mehr *als Teil* des Minuenden, sondern *getrennt* von ihm als herausgelöste Teilmenge. Die Darstellung über ein vollständiges Entfernen verhindert diese Ex-post-Betrachtungsweise. Zudem wird der Bezug zur Umkehrung der Operation verunmöglicht, was dem sachgemäßen Verständnis des Zusammenhangs der beiden Operationen widerspricht.

Abbildungen, die dieses potenzielle Fehlverständnis vermeiden, zeigen z.B. einen Teil der Äpfel, der in eine andere Schale bzw. für den geplanten Verzehr davor gelegt wird. Oder sie bilden einen Teil der Vögel ab, der sich aus dem Schwarm gelöst hat und auf einen anderen Baum geflogen ist. Nur so sind die Schüler in der Lage, auch *nach* der Operation noch über die eben vollzogene quantitative Veränderung durch die Subtraktion zu reden, auf die Gesamtmenge und deren Teile zu deuten und den Bezug zu den Zahlen in der notierten Rechengleichung herzustellen. Wichtig ist beim Begreifen der Subtraktion das Nachvollziehen der Rolle von Minuend, Subtrahend und Wert der Differenz im operationalen Gefüge – dafür sind Abbildungen bzw. Vorstellungen, die das Teil-/Ganzes-Konzept verschleiern, höchst ungeeignet.

„Man darf umdrehen!“ Warum eigentlich? Die Stellung der Operanden im operationalen Gefüge

Bei $3 + 4$ und $4 + 3$ handelt es sich nicht um identische Rechnungen, denn es sind zwei verschiedene operationale Bezüge ausgedrückt. Einigen Kindern scheint beides jedoch gleichbedeutend zu sein. „3 + 4 oder 4 + 3, das ist egal!“, lautet eine häufige Antwort auf die Frage, welche Rechnung genau zu der Handlung passe, bei der ich zu vier Plättchen drei hinzuschiebe. Uns als Lehrende darf dies jedoch nicht egal sein. Durch die lateinische Schreibrichtung ist eine logische Reihenfolge ausgedrückt: Der erste Operand benennt die Ausgangsanzahl, der zweite Operand gibt den Teil an, der hinzugefügt wird. Es macht einen logischen Unterschied, ob in einer Schale erst drei Äpfel liegen und ich vier hinzulege oder ob es sich andersherum verhält. Das Resultat ist gleich, die Rechnung ist verschieden.

Sicherlich, wenn mich nur der Wert der Summe, die Gesamtanzahl, interessiert, ist es unwichtig, in welcher Reihenfolge ich die Teile benenne. Diesen Sachverhalt kann ich mir beim Rechnen zu Nutze machen, wenn es einen Rechenvorteil einbringt. Doch ist dafür ein logischer Vorgang nötig, nämlich der Tausch der beiden Teilmengen. Dieser Vorgang muss im Mathematikunterricht explizit gemacht werden – damit erklärt man das „Umdrehen“ und er verliert den Charakter einer bloßen Merkregel. Denn bei rechenschwachen Schülern ist häufig der Partner dieser „Regel“ die komplementäre Aussage „Bei ‚minus‘ darf ich auch umdrehen!“, was zu Fehlern wie „13 – 9 = 16“ führt.

Operationale Bezüge: Der innere Gehalt von Tausch und Umkehrung

Wenn für das Kind jede Rechenoperation isoliert für sich steht, hat es noch kein tragfähiges operationales Verständnis entwickelt. Im zweiten Drittel der ersten Klasse sollten Kinder flexibel Beziehungen zwischen zusammengehörigen Rechnungen herstellen können. Hierzu will ich anhand der folgenden Abbildung 2 – ausgehend von der Zahlzerlegung „acht besteht aus fünf und drei“ – die vier daraus ableitbaren Rechnungen entwickeln und die Zusammenhänge zwischen ihnen erläutern. Denn diese Zusammenhänge sollten Schüler für ein tragfähiges rechenoperationales Konzept begriffen haben.

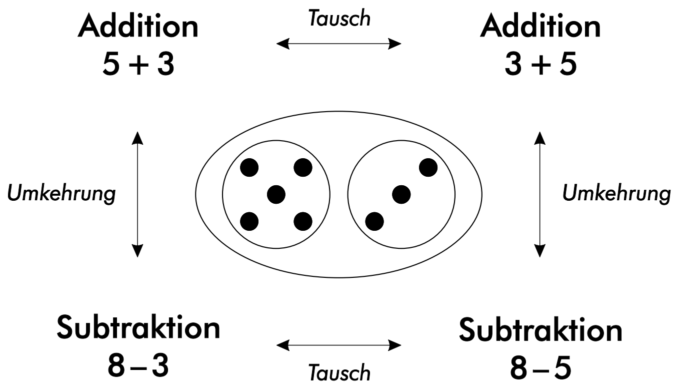

Abb. 2: Zusammenhänge der Grundrechenarten Addition und Subtraktion

Zunächst erhält man durch das Zusammenfügen der beiden Teile die Summe $5 + 3$, wobei die Reihenfolge der Operanden, wie oben ausgeführt, festgehalten werden muss. Die *Tauschrechnung* erhält man durch das Vertauschen der Teile – dass sich dabei die beiden Summanden vertauschen, ist eine *Folge* dieser logischen Operation. Einen anderen operationalen Bezug zu $5 + 3$ erhält man, wenn der rechnerische Gedanke und die dazu vollzogene Handlung rückgängig gemacht werden. Man erhält so die Umkehrung $8 - 3$. Der Teil, der hinzukam, wird wieder weggenommen, $5 + 3$ hat also genau eine Umkehrung.

Wie sieht nun der *Tausch* der Subtraktion aus? Wenn man den Gehalt der Rechenoperation betrachtet (und zunächst nicht die Rechengleichung), gelange ich von $8 - 3$ zu $8 - 5$, in dem ich die beiden Teile vertausche. Wenn ich subtrahiere, nehme ich einen Teil weg, der andere verbleibt – beim Tausch nehme ich den anderen weg und der eine verbleibt. Inhaltlich betrachtet ist der Tausch bei Addition und Subtraktion somit der gleiche, der Tausch der beteiligten Teile. In der geschriebenen Rechnung drückt sich dies bei der Addition als Tausch der Summanden, bei der Subtraktion als Tausch von Subtrahend und Wert der Differenz aus.

So sollte meines Erachtens die richtige Reihenfolge der Erarbeitung sein: Erst muss das Kind erfassen, was mit den Quantitäten Gesamtanzahl und Teile beim Tausch passiert und erst danach sollte die zugehörige Rechengleichung formuliert werden. Wenn der erste Schritt entfällt, führt dies häufig dazu, dass Schüler sich eine (mehr oder wenig sinnfreie) Umsortierungsregel merken. Eine solche formelle und mathematisch unsachliche Vorstellung liegt auch bei der häufig von rechenschwachen Kindern zu hörenden Umsortierungsregel für die Umkehrung vor: „Was hinten steht, kommt nach vorne!“ Hier ist das Kind lediglich damit beschäftigt, die neue Rechnung aufzuschreiben, indem es die Zahlen schlicht von hinten nach vorne aufschreibt und das Rechenzeichen austauscht. Die wichtige Leistung, den Gehalt des operationalen Bezugs zu verstehen, bleibt dabei leider auf der Strecke.

Schließlich kann ich die Tauschrechnung umkehren und finde auf diese Weise zwei Wege, um von $5 + 3$ zu $8 - 5$ zu gelangen: Erst Tausch, dann Umkehrung oder erst Umkehrung, dann Tausch. Die Umkehrung vom Tausch entspricht also dem Tausch der Umkehrung. Nur wenn diese Beziehungen hergestellt werden können (die aus einer einzigen Zahlzerlegung abgeleitet werden können), ist das Operationsverständnis beim Schüler wirklich ausgebildet. Erst ab diesem Zeitpunkt kann ich mich als Pädagoge beruhigt daran machen, den nächsten logischen Schritt zu vollziehen und mich den Vergleichssymbolen und Platzhalteraufgaben zuwenden.

„Nach dem ‚Istgleich' steht das Ergebnis!" – Symbolverständnis der Vergleichszeichen

Für die symbolische Notation einer Rechnung ist mehr nötig, als das reine Verständnis der Rechenoperation. In einer Gleichung wie $5 + 3 = 8$ wird ein Vergleichssymbol verwendet, über dessen Bedeutung so manche kindliche Fehlvorstellung kursiert. Neben der vermeintlichen Funktion als Positionsbestimmung („Dahinter kommt das Ergebnis!") ist die falsche Auffassung als Befehlszeichen („Da muss ich rechnen!") verbreitet. Kinder mit solchen Fehlvorstellungen lehnen die Notation einer Zahlzerlegung wie „ $10 = 6 + 4$" als falsch ab („Das ist verkehrt herum, das Ergebnis muss hinten stehen!") oder klassifizieren eine richtige Aussage wie „$7 + 2 = 10 - 1$" als unkorrekt („$7 + 2$ ist doch 9 und nicht 10!") und als unvollständig („Da muss noch ein ‚= 9' dahinter!"). Allen diesen kindlichen Vorstellungen ist gemein, dass sie sich dieses Symbol nicht als ein Vergleichssymbol erschlossen haben, das zur Familie von „<" und „>" gehört. Ein Vergleichszeichen setzt zwei arithmetische Terme als mathematische Aussage zueinander ins Verhältnis. Diesen algebraischen Elementargedanken muss ein Schüler nachvollziehen – natürlich mit entsprechendem kindlichen Vokabular (wie „auf beiden Seiten habe ich gleich viel"). Das Prüfen von vorgegebenen (Un-)Gleichungen auf ihren Wahrheitsgehalt hin ist ein gutes Mittel, dies zu erarbeiten. Erst wenn die Schüler in der Lage sind, quantitative Vergleiche wie „ist weniger als", „ist mehr als" und „ist gleich viel wie" logisch zu beschreiben und symbolisch zu notieren, haben sie die nötigen Voraussetzungen, Rechen- und Zerlegungs- Gleichungen verständig zu notieren.

Intermodalität: Bewährungsprobe des operationalen Verständnisses

Dem mathematischen Ebenenwechsel kommt bei der Erarbeitung der Elementaroperationen eine große Bedeutung zu. Kinder müssen lernen, die mathematischen Darstellungsebenen Rechengeschichte, konkrete Handlung, bildliche Darstellung und Rechengleichung in jede beliebige Richtung wechseln zu können. Zu einer vorgeführten Handlung sollte der Schüler eine passende Rechnung formulieren können, zu einer Rechnung eine angemessene Rechengeschichte erzählen können usw. In der Praxis erlebe ich es häufig, dass bei einem Kind das reine „Rechenvermögen" (zumeist durch verdecktes, routiniertes Zählen) gut ausgebildet ist. Sobald es jedoch darum geht, gedanklich auf die Bedeutung der Grundrechenarten als Vermehrung respektive Verminderung zurückzugreifen, geht alles schief. So erlebe ich oft, dass zu einer Handlung, bei der von sieben Plättchen drei weggeschoben werden, die unpassende und unsinnige Rechnung „$4 - 3 = 4$" genannt wird – der Schüler benutzt in figural-statischer Weise die Anzahlen der vorfindlichen Teilmengen, kombiniert diese mit einem Minuszeichen und nennt schließlich die Anzahl der verbleibenden Menge als Ergebnis. Ein anderes Kind erzählt mir eine Rechengeschichte zu „$8 + 4 = 12$": „Eine Vier und eine Acht gehen im Wald spazieren. Dort treffen sie die Zwölf." Die quantitative Veränderung, welche durch die Rechnung ausgedrückt wird, kommt in dieser Erzählung gar nicht vor – stattdessen werden die

Zahlsymbole zu handelnden Subjekten der kindlichen Geschichte. Der Schüler drückt auf seine Weise damit aus, dass für ihn Rechnen mit Anzahlveränderungen nichts zu tun hat.

Analytische Aufgabenstellungen: Bewährungsprobe für das Rechenverständnis

Sind die Logik der Operationen und ihr Verhältnis zueinander nicht erschlossen, ergeben sich Probleme bei Aufgaben, deren Präsentation nicht der gewohnten Form entspricht: Platzhalteraufgaben. In der lerntherapeutischen Arbeit werden sie „analytische Aufgaben" genannt, da ohne *Analyse* der Gleichung eine sinnvolle Bearbeitung nicht gelingt. Kinder ohne fundiertes Operationsverständnis stoßen hier an ihre Grenzen, denn man braucht Kenntnisse über die Rolle der Operanden in der Gleichung, um die fehlende Zahl bestimmen zu können. Die gesuchte Zahl kann ein Teil oder die Gesamtanzahl sein und je nach operationalem Kontext muss die Umkehrung oder der Tausch zur Lösung herangezogen werden.

In manch curricularer Diskussion wird der Vorschlag geäußert, diese Sorte Aufgabenstellungen aus dem Grundschullehrplan zu streichen, da sie so „schwierig" seien und prozentual viele Kinder daran scheitern. Doch schließe ich aus den Schwierigkeiten vieler Schüler etwas ganz anderes: Wenn fünf oder seien es auch zehn Prozent der Grundschüler Gleichungen mit Platzhaltern nicht analytisch lösen können, dann ist wohl ihr operationales Verständnis nicht im erforderlichen Maße ausgebildet. Diese Aufgabenstellungen haben meines Erachtens einen unverzichtbaren didaktischen und diagnostischen Wert und sind ein unabdingbarer Bestandteil der mathematischen Grundbildung. Erst wenn analytische Additionen und Subtraktionen dieses Aufgabentyps über die operationalen Zusammenhänge gelöst werden können, ist die Erarbeitung dieser beiden Grundrechenarten wirklich abgeschlossen – und erst dann haben Schüler das nötige algebraische Rüstzeug dafür, später Gleichungen verständig umzuformen.

Resümee

Im Hinblick auf die weiterführenden Klassen besteht eine Herausforderung an den Unterricht der ersten Klasse. Die arithmetischen Inhalte des ersten Grundschulhalbjahres sind als arithmetisches Fundament, wie hier an Schwerpunkten dargelegt, alles andere als trivial und keineswegs selbstverständlich. Zahlen sind abstrakt. Rechnen, was diesen Namen wirklich verdient, ist ein Verändern von Anzahlen und findet durch geistige Vorstellung im Kopf statt – und dies zählfrei durch den systematischen Umgang mit Quantitäten. Die Menschheit brauchte mehrere tausend Jahre, um dieses effektive System der Zahlbilanzierung zu entwickeln – unsere Kinder müssen dies in der Grundschule nachvollziehen. Ich halte es daher für grob fahrlässig, wenn das Kultusministerium keine Fachlehrerpflicht für den mathematischen Erstunterricht vorsieht. Nötig ist eine detaillierte *fachliche* und vor allem auch *fachdidaktische* Auseinandersetzung des Pädagogen mit dem basalen arithmetischen Erstlernstoff. Die Grundschullehrerausbildung (zumindest die in Niedersachsen) sieht dies allerdings nicht verpflichtend vor – eine entsprechend fundierte Ausbildung gibt es nur bei speziell für die außerschulische Hilfe ausgebildeten Dyskalkulie-Therapeuten.

Lehrkräfte, die sich überfordert fühlen (sei es, weil es an fachlicher Ausbildung mangelt, sei es, weil die schulischen Fördermöglichkeiten nicht gegeben sind), sollten sich daher nicht scheuen, mit qualifizierten außerschulischen Bildungsträgern zu kooperieren – durchaus auch schon im ersten Schuljahr. Doch was ist „qualifiziert"? Es sind nur Einrichtungen zu empfehlen, die sich mit gut ausgebildeten Fachkräften auf Rechenschwächetherapie spezialisiert haben. Um handhabbare Maßstäbe für die Beurteilung lerntherapeutischer Einrichtungen an der

Hand zu haben, hat der Arbeitskreis des gemeinnützigen Zentrums für angewandte Lernforschung Qualitätskriterien zusammengestellt, welche im Internet unter der Webadresse *http://kriterien.arithmasthenie.info* abrufbar sind. Nur Einrichtungen, die diesen Kriterien genügen, sind unseres Erachtens in der Lage, rechenschwachen Kindern zu helfen, ihre Lerndefizite in Mathematik nachhaltig zu überwinden.

Denn eines ist sicher: Wenn Kinder die ersten Schritte der rechnerischen Entwicklung nicht verständig durchlaufen, gelingt es ihnen aus eigener Kraft in aller Regel nicht, dies aufzuholen. Und eine falsche Hilfe, welche die Kinder überfordert, weil erst an der Stelle angesetzt wird, an der sie leistungsauffällig geworden sind (also die Noten nicht mehr stimmten) oder ein Förderunterricht, in dem der auf Grund der defizitären Lernausgangslage nicht zu verstehende Schulstoff dennoch zum x-ten Male wiedergekäut wird und in dem gar das ständige Üben zum zentralen „Förder"-Ratschlag erhoben wird, leistet nur eines: das Fortbestehen und die Verfestigung der Rechenschwäche – und damit wird und bleibt Mathematik für diese Schüler von Schuljahr zu Schuljahr ein mühsameres und bedrohlicheres Angstfach.

Literatur

BRÜHL, HANS; BUSSEBAUM, CHRISTIAN; HOFFMANN, WOLFGANG; LUKOW, HANS-JOACHIM; SCHNEIDER, MARTINA; WEHRMANN, MICHAEL: Rechenschwäche/Dyskalkulie. Symptome – Früherkennung – Förderung, Osnabrück 2003

GAIDOSCHIK, MICHAEL: Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr, Frankfurt/M. 2010

GAIDOSCHIK, MICHAEL: Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: vom Zählen zum Rechnen, Wien 2007

GERSTER, HANS-DIETER: Vom Fingerrechnen zum Kopfrechnen – Methodische Schritte aus der Sackgasse des zählenden Rechnens. In: EBERLE, GERHARD; KORNMANN, REIMER (Hg.): Lernschwierigkeiten und Vermittlungsprobleme im Mathematikunterricht an Grund- und Sonderschulen. Möglichkeiten der Vermeidung und Überwindung, Weinheim 1996 (S. 137-162)

GERSTER, HANS-DIETER; SCHULTZ, RITA: Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht, Freiburg 2000

KUTZER, REINHARD; BAGUS, GERALD; FREISE, BRIGITTE; HERZBERG, HEINRICH; KUTZER, GÜNTER; MÜLLER, HELMUT: Mathematik entdecken und verstehen, Frankfurt/M. 1995 (Schülerband 1) und 1998 (Kommentarband 1)

LENZ, HANFRIED: Grundlagen der Elementarmathematik, München 1976

PIAGET, JEAN; SZEMINSKA, ALINA: Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde, Stuttgart 1975 (*franz. Erstausgabe*: Neuchâtel 1941)

ROCHMANN, KATJA; WEHRMANN, MICHAEL: „Bloß kein minus… lieber plus!" Die Subtraktion – ein Buch mit sieben Siegeln?, Osnabrück 2009

WEHRMANN, MICHAEL: Qualitative Diagnostik von Rechenschwierigkeiten im Grundlagenbereich Arithmetik, Berlin 2003

Über den Autor

Dr. rer. nat. Michael Wehrmann ist wissenschaftlicher Leiter des Instituts für Mathematisches Lernen in Braunschweig, einer Beratungs- und Forschungseinrichtung für Diagnostik, Therapie und Prävention der Rechenschwäche/Dyskalkulie. Er promovierte an der Humboldt-Universität zu Berlin am Institut für Mathematik zum Thema „Qualitative Diagnostik von Rechenschwierigkeiten im Grundlagenbereich Arithmetik".

Als wissenschaftlicher Beirat im Arbeitskreis des Zentrums für angewandte Lernforschung Osnabrück, einer gemeinnützigen Einrichtung, arbeitet er im Bereich der Ausbildung, der Öffentlichkeitsarbeit und des Wissenschaftstransfers und ist Mitherausgeber zahlreicher Schriften zur Thematik „Hilfe bei Rechenschwäche/Dyskalkulie". (Ein Porträt des Arbeitskreises findet sich im BVL-Magazin LeDy Heft 04-2009, S. 52 ff.)

Kontakt zum Autor:

E-Mail:	wehrmann@iml-braunschweig.de
Telefon:	(0 53 1) 12 16 – 77 50
Homepage Institut:	http://www.iml-braunschweig.de
Homepage Arbeitskreis:	http://www.arbeitskreis-lernforschung.de

Vollständige Anschrift

Dr. rer. nat. Michael Wehrmann
Institut für Mathematisches Lernen (IML) Braunschweig
Wissenschaftliche Leitung
Steinweg 4, 38100 Braunschweig, Deutschland
Tel.: (0 53 1) 12 16 - 77 50
Fax: (0 53 1) 12 16 - 77 59
E-Mail: wehrmann@iml-braunschweig.de